Stefan GÖTZ, Wien, Hans-Stefan SILLER, Salzburg

Vom Modellieren zum Definieren oder: Mathematik-(unterricht) rund ums Ei

Mathematische Beschreibung der Realität

Wie die Geschichte der Mathematik lehrt, ist es mit mathematischen Theorien manchmal möglich, Fragen aus der Realität einfach und routinemäßig zu beantworten. Aber ebenso kann das Gegenteil, d. h. Theorie und Realität entfernen sich voneinander (vgl. Maaß 1988), eintreten.

Auf der Suche nach *Eikurven* findet man sowohl Darstellungen, welche in der Natur praktisch nicht auffindbar sind, als auch Eier, die aufgrund besonderer Formen (z. B. extrem gedrungen oder länglich) mit den dargestellten Zugängen nicht beschrieben werden können (vgl. Siller et al. 2009).

Eine historische Eikurve

Die historische Dimension des Modellbildens im Mathematikunterricht sollte Schüler(inne)n nicht verwehrt bleiben, insbesondere in einem genetisch orientierten Unterricht. Durch die Berücksichtigung der direkten bzw. indirekten historischen Methode (vgl. Toeplitz 1927, 92) können (notwendige) Ansätze dargelegt und Schüler(inne)n verständlich erklärt werden. Mittels des indirekten Ansatzes und dem Aufgreifen der Definition einer Eilinie nach Schmidt 1907 kann eine mögliche Unterrichtssequenz stattfinden. Schmidt formuliert die folgende Definition: „*Eine Eilinie ist der geometrische Ort der Fußpunkte aller Lote auf Sekanten, gefällt von den Schnittpunkten der Abscisse mit Winkelhalbierenden, welche (stumpfe) Winkel zwischen den Sekanten und Parallelen zur x-Achse in den Schnittpunkten der Sekanten mit der Kreisperipherie halbieren.*“

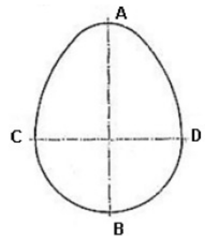
Mittels eines DGS kann man durch die Implementierung dieser Definition die Punkte, die auf der Ortslinie der Eikurve liegen, erzeugen. Übersetzt man die Schritte in ein CAS, werden die (Polar- oder kartesischen) Koordinaten dieser Punkte allgemein berechnet (vgl. Siller et al. 2009).

Eigentätigkeit der Schüler(innen) durch Rückgriff auf Bekanntes

„*Ein Ei ist ein Objekt, das aus einer Halbkugel und einem Halbellipsoid zusammengesetzt ist.*“ (Wie) passt das? – Dieser Ansatz ist nachvollziehbar und die Idee ist im Unterricht umsetzbar (vgl. Siller et al. 2009, 48 ff.).

Möchte man allerdings ein „besonders schönes“ Ei konstruieren, kann man mit der nun vorliegenden Proportion von Haupt- zu Nebenachsenlänge experimentieren. Eine – naheliegende – Idee dafür ist der *Goldene Schnitt*. So kann man eine zufriedenstellende Beschreibung eines mathematisch „idealen“ Eis erreichen, welche wir bewusst nicht als Definition verwenden möchten, da es zu viele Ei-Objekte (v. a. in der Natur) gibt, welche nicht der gewünschten Repräsentation entsprächen:

„Ein Ei ist ein dreidimensionales Objekt, dessen unterer Teil eine Halbkugel und dessen oberer Teil ein Halbellipsoid ist. Das Verhältnis der Längen AB zu CD soll dem Goldenen Schnitt entsprechen.“



Definitionen im Mathematikunterricht

Die Begriffsbildung spielt eine zentrale Rolle in der Mathematik. Folgt man dem didaktischen Prinzip der *Fundamentalen Ideen*, dann sollte das auch für den Mathematikunterricht gelten, alleine schon um *Eindeutigkeit in der Kommunikation* anzustreben. Definitionen stehen oft am Ende einer langen Entwicklung von Problem- oder Fragestellungen, z. B. beim Wahrscheinlichkeitsbegriff. Beim Reden über Mathematik (in einem Vortrag, im Unterricht) ist es oft gerade umgekehrt (Ausnahme: Siller et al. 2009). Begriffsentwicklung und Definitionen stehen in einem wechselseitigen Verhältnis zueinander, dieses zu beleuchten, fördert das Verständnis für die Mathematik (vgl. Vinner 1991).

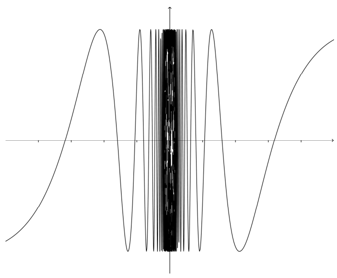
Andererseits beginnen mathematische Begriffe nach ihrer Festsetzung („Definition“) oft ein Eigenleben zu führen, flächenfüllende Kurven (z. B. die Peanokurve) waren wohl nicht das Ziel des Ringens um den Kurvenbegriff. *Begriffe werden erfunden, Zusammenhänge entdeckt!*

Wir unterscheiden nach Ouvrier-Buffet (2002, 384) *drei Typen von Definitionsentstehungsprozessen:* eine Definition kann erstens ausgehend von Beispielen und Gegenbeispielen konstruiert werden (z. B. Funktions- oder Stetigkeitsbegriff), zweitens durch die Lösung einer Problemstellung, durch einen Beweis erzeugt werden (beweiserzeugte Definitionen, z. B. Binomialkoeffizient), und kann schließlich drittens durch einen Modellierungsprozess motiviert werden. Ein Ei mathematisch zu definieren ist ein solcher Versuch.

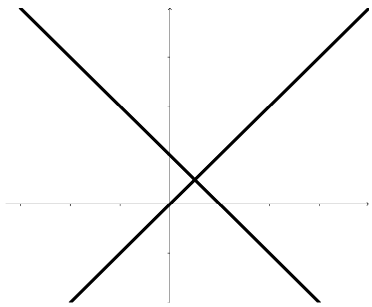
Zum Stetigkeitsbegriff

In Österreich ist dieser in der zehnten Schulstufe vorgesehen. Wofür eigentlich? – In Götz & Reichel 2005, 238, werden *„fadenförmige“* Funktionen in der Hoffnung charakterisiert, dass Verfahren zur Nullstellensuche funktionieren, d. h. z. B. Sprungstellen so ausgeschlossen werden können.

Ein anderer – eher hochschuldidaktischer – Vorschlag ist, an diesem Beispiel den Aspekt *konkurrenzierender Definitionen* zu zeigen, d. h. ihre Wahl, willkürlich oder absichtsvoll, zu thematisieren. Die übliche $\varepsilon-\delta$-Definition der Stetigkeit einer reellen Funktion *f* an einer Stelle ξ (Def. 1) versus der ebenso üblichen Folgendefinition (Def. 2) stehen zur Wahl, ihre Äquivalenz muss gezeigt werden (siehe z. B. Heuser 1986, 212 und 215).



Die Funktion $f(x)=\sin\frac{1}{x}, x\neq 0, f(0)=0$ ist bekanntlich *nicht stetig in Null*, Def. 1 zeigt das: $\forall\delta>0$ $\exists x$ mit $|x|<\delta$ und $|f(x)|>\frac{1}{2}$, d. h. die Schwankung ist nicht „in den Griff" zu bekommen. Was ist aber jetzt mit der Fadenförmigkeit?! Def. 2 erfordert das Betrachten spezieller Folgen, z. B. $x_n=\frac{1}{(2n+1)\frac{\pi}{2}}$, für Lernende nicht gerade einsichtig. Umgekehrt ist eine Sprungstelle oft mit Hilfe von Def. 2 einfacher als Unstetigkeitsstelle zu identifizieren. Die Frage nach der „richtigen" Definition ist also auch eine (hochschul-)didaktische!



Definitionen könne auch *Beweise erzeugen:* nebenstehende Zeichnung zeigt den Graph einer (!) in einem Punkt stetigen (!) Funktion (!). Die Definition zeigt warum: $f(x)=x$, *x* rational, $f(x)=1-x$ sonst. Obwohl der Graph nicht aus einem Stück ist, die Funktion nicht durch *eine* Formel gegeben ist und der Graph nicht kontrollierbar schwankt, ist *f* an der Stelle $\frac{1}{2}$ stetig. Eine Begründung erfolgt mit Def. 1: egal, ob *x* rational oder irrational gewählt wird, $\delta:=\varepsilon$ funktioniert. Stetigkeit ist also eine *lokale* Eigenschaft (Tall & Vinner 1981, 168).

Kegelschnitte

Sie spielen in Österreich unterschiedliche Rollen: als *Kegelschnitte* marginal, als *Ortslinien* bevorzugt in der Sekundarstufe 1, als *algebraische Objekte* in der Sekundarstufe 2, und als *Graph gewisser funktionaler Abhängigkeiten* bleiben sie ein Mysterium: warum ist der Graph der indirekten Proportionalität eine Hyperbel? – Verschiedene Definitionen (Zugänge) verlangen nach dem Zeigen von Zusammenhängen!

Eine einfache Hauptachsentransformation klärt das Mysterium auf: $x\cdot y=1$ in den alten Koordinaten wird zu $\bar{x}^2-\bar{y}^2=2$ in den neuen, wobei eigentlich eine Drehung um 45 Grad genügt: $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ und ihre Transponierte (sowie vice versa!) leisten das.

Ein gerader Drehkegel mit einem Öffnungswinkel von 90 Grad wird senkrecht zu einer Erzeugenden geschnitten: die sich ergebende Kurve ist eine Parabel mit der Gleichung $y^2 = 2px$, wie man leicht mit dem Höhensatz und dem Satz von Thales sehen kann. Umgekehrt kann eine als algebraisches Objekt gegebene Parabel $y^2 = 2px$ einfach durch einen solchen Schnitt erzeugt werden: *p* an der Erzeugenden von der Spitze aus abtragen, dort ist dann der Einschnittpunkt (siehe http://www.members.tripod.com/sfabel/mathematik/themen_kegelschnitte.html, 15.2.2010).

Definitionen enthalten also immer eine Genau dann – wenn-Beziehung.

Literatur

Götz, S. & Reichel, H.-C. (2005, Hrsg.). *Mathematik-Lehrbuch 6* von R. Müller und G. Hanisch. Unter Mitarbeit von C. Wenzel und M. Müller. Wien: öbv.

Heuser, H. (1986). *Lehrbuch der Analysis. Teil 1.* Stuttgart: B. G. Teubner (4., durchgesehene Auflage).

Maaß, J. (1988). *Mathematik als soziales System. Geschichte und Perspektiven der Mathematik aus systemtheoretischer Sicht.* Weinheim: Deutscher Studien Verlag.

Ouvrier-Buffet, C. (2002). Zum Begriff der Definition. Eine epistemologisch-didaktische Untersuchung. In W. Peschek (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2002. Vorträge auf der 36. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 25. Februar bis 1. März 2002 in Klagenfurt* (383 - 386). Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

Schmidt, C. H. L. (1907). Über einige Kurven höherer Ordnung. *Zeitschrift für mathem. u. naturwiss. Unterricht, 38. Jg.,* 485 ff.

Siller, H.-S., Maaß, J. & Fuchs, K. J. (2009). Wie aus einem alltäglichen Gegenstand viele mathematische Modellierungen entstehen - Das Ei als Thema des Mathematikunterrichts. In H.-S. Siller & J. Maaß (Hrsg.), *Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht. Schriftenreihe der Istron-Gruppe, Band 13: Modellieren lernen* (31 - 109). Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educ. Stud. Math. 12 (2),* 151 - 169.

Toeplitz, O. (1927). Das Problem der Universitätsvorlesungen über Infinitesimalrechnung und ihrer Abgrenzung gegenüber der Infinitesimalrechnung an den höheren Schulen. *Jahresber. Dt. Math. Verein, 36,* 90 - 100.

Vinner, S. (1991). The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (65 - 81). Dordrecht et al.: Kluwer.